

УДК 539.3

© 2002 г. А.А. КОРОЛЕВ

## УПРУГИЙ КОНТАКТ ГЛАДКИХ ТЕЛ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Как известно, решение контактной задачи для гладких упругих тел с начальным одноточечным контактом (задача Герца) рассматривалось в многочисленных работах [1–6]. Одним из важнейших условий успешного решения указанной задачи являлось предположение, что в окрестности точки начального контакта контактирующие поверхности представляются, как правило, в виде однородного многочлена второй степени, а следовательно, однородным многочленом второй степени описывается и функция начального зазора между ними. Однако такое ограничение оправдано только для малых размеров площадок контакта по сравнению с размерами самих контактирующих тел. На практике часто встречаются случаи контакта тел со значительными размерами площадок контакта и случаи контакта тел сложной геометрической формы, описываемых неоднородными уравнениями произвольной степени, которые выходят за рамки задачи Герца. Особый интерес представляет контакт тел с различной формой начального зазора в главных сечениях, при котором уравнения, описывающие эту форму, имеют разные значения степени. Будем в дальнейшем называть такой случай контакта контактом тел сложной геометрической формы.

Для решения указанной задачи, рассмотрим контакт двух упругих тел сложной формы под воздействием нормальной нагрузки  $P$ . Считаем, что касательные напряжения отсутствуют. Будем полагать также, что при отсутствии нормальной нагрузки тела имеют первоначальный точечный контакт. Выберем эту точку за начало декартовых координат (фигура). Оси  $XOY$  лежат в общей касательной плоскости, а ось  $Z$  направляют через точку  $O$  перпендикулярно этой плоскости вовнутрь одного из контактирующих тел. Пусть главные сечения контактирующих тел лежат в одних плоскостях (для определенности в плоскости  $X = 0$  и плоскости  $Y = 0$ ).

Берутся две точки  $M_1(x, 0, z_1)$  и  $M_2(x, 0, z_2)$ , принадлежащие соответственно первому и второму контактирующим телам и лежащие в плоскости  $Y = 0$  и точки  $N_1(0, y, z_1)$  и  $N_2(0, y, z_2)$ , принадлежащие также как и точки  $M_1$  и  $M_2$  соответственно первому и второму контактирующим телам, но лежащие в плоскости  $X = 0$ . Пусть начальные расстояния  $|M_1M_2|$  и  $|N_1N_2|$  выражаются зависимостями

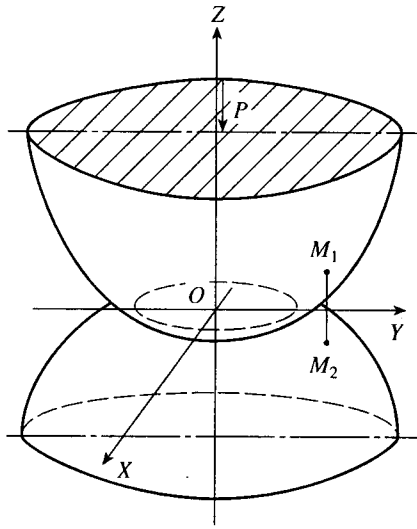
$$|M_1M_2| = z_1 - z_2 = B|x|^m, |N_1N_2| = z_1 - z_2 = A|y|^n$$

а также будем полагать, что между контактирующими телами будет образовываться эллиптическая площадка контакта.

Следует сделать замечание, что форма контактирующих тел в публикуемой работе исследоваться не будет, только будет предполагаться, что эти тела имеют такую форму, которая удовлетворяет сделанным предположениям. В таком случае вместо краевого условия, для которого необходимо знать форму тел, будем иметь следующие уравнения:

$$w_1(s, 0, 0) + w_2(x, 0, 0) = \delta - (z_1 - z_2) = \delta - B|x|^m \quad (1)$$

$$w_1(0, y, 0) + w_2(0, y, 0) = \delta - (z_1 - z_2) = \delta - A|y|^n$$



где  $w_1(x, y, z)$  и  $w_2(x, y, z)$  – вертикальное перемещение точек соответственно первого и второго контактирующего тела,  $\delta$  – сближение тел под воздействием нормальной нагрузки.

С другой стороны, если обозначить через  $q(x, y)$  плотность потенциала простого слоя в точке  $(x, y)$ , то вертикальное перемещение в этой точке можно найти из выражения

$$w(x, y, 0) = w_1(x, y, 0) + w_2(x, y, 0) = \left( \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint_S \frac{q(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}$$

где  $S$  – эллиптическая площадка контакта  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ,  $\mu_1, \mu_2$  – коэффициенты Пуассона, а  $E_1$  и  $E_2$  – модули упругости соответственно первого и второго тела.

С учетом сделанного ранее замечания это интегральное уравнение в общем виде не рассматривается, а заменяется на два более простых условия. Учитывая, что  $|M_1 M_2| = = B|x|^m, |N_1, N_2| = A|y|^n$  уравнения (1) примут вид

$$\left( \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint_S \frac{q(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + y^2}} = \delta - B|x|^m \quad (2)$$

$$\left( \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint_S \frac{q(x', y') dx' dy'}{\sqrt{x'^2 + (y - y')^2}} = \delta - A|y|^n$$

Далее будем считать, что внешняя нагрузка, участвующая в упругом сжатии тел, принимает заданное значение  $P$  не мгновенно, а в течение некоторого времени, возрастая от нулевого своего значения. Тогда мы можем рассмотреть контакт упругих тел под некоторой промежуточной нормальной нагрузкой  $Q$ . Обозначим малую и большую полуоси эллиптической площадки контакта, возникшей под нагрузкой  $Q$ , соответственно через  $a_Q$  и  $b_Q$ , а соответствующие размеры площадки контакта при полной нагрузке  $P$  через  $a$  и  $b$ . При приращении внешней нагрузки  $dQ$  будем предполагать поочередно одно из контактирующих тел плоским эллиптическим в плане штампом, а другое – упругим полупространством.

Как известно, напряжение, возникающее на площадке контакта от воздействия плоского эллиптического в плане штампа под воздействием нормальной нагрузки  $dQ$ ,

определяются из выражения

$$dq(x, y) = \frac{dQ}{2\pi a_Q b_Q \sqrt{1 - x^2/a_Q^2 - y^2/b_Q^2}} \quad (3)$$

а сближение описывается равенством

$$d\delta_Q = \frac{v_0}{b_Q} K(e_Q) dQ \quad (4)$$

где  $e_Q$  – эксцентриситет эллипса контакта, возникающий под воздействием внешней нагрузки  $Q$ ;  $K(e_Q)$  – эллиптический интеграл первого рода

$$v_0 = \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{\pi E_2}$$

Обозначим через  $(x_p, y_p)$  координату точки, лежащую на эллипсе контакта при нагрузке  $P$  и введем полярную систему координат:

$$\begin{cases} \xi = x_p - l \cos \varphi \\ \eta = y_p - l \sin \varphi \end{cases}$$

где  $l$  – полярный радиус профиля площадки контакта;  $\varphi$  – полярный угол.

Тогда на основе (3) вертикальное перемещение в точке  $(x_p, y_p)$  под воздействием внешней нагрузки  $P$  в области контакта можно найти из выражения

$$w(x_p, y_p, 0) = v_0 \int_0^P \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{l_1(\varphi)}^{l_2(\varphi)} \frac{dl d\varphi dQ}{2\pi a_Q b_Q \sqrt{1 - ((x_p - l \cos \varphi)/a_Q)^2 - ((y_p - l \sin \varphi)/b_Q)^2}} \quad (5)$$

где пределы внутренних интегралов – полярные границы площадки контакта, образованной под воздействием промежуточной нормальной нагрузкой  $Q$ .

Границы внутреннего интеграла  $l_1(\varphi)$  и  $l_2(\varphi)$  находятся из уравнения

$$1 - \left( \frac{x_p - l \cos \varphi}{a_Q} \right)^2 - \left( \frac{y_p - l \sin \varphi}{b_Q} \right)^2 = 0$$

корни которого имеют вид

$$l_{1,2}(\varphi) = \frac{1}{a_Q^2 \sin^2 \varphi + b_Q^2 \cos^2 \varphi} \left[ b_Q^2 x_p \cos \varphi + a_Q^2 y_p \sin \varphi \pm a_Q b_Q \sqrt{a_Q^2 \sin^2 \varphi + b_Q^2 \cos^2 \varphi - (x_p \sin \varphi - y_p \cos \varphi)^2} \right]$$

Тогда после непосредственного интегрирования получаем

$$\int_{l_1(\varphi)}^{l_2(\varphi)} \frac{dl}{2\pi a_Q b_Q \sqrt{1 - ((x_p - l \cos \varphi)/a_Q)^2 - ((y_p - l \sin \varphi)/b_Q)^2}} = \frac{1}{2b_Q \sqrt{1 - e_Q^2 \sin^2 \varphi}}$$

откуда выражение (5) примет вид

$$w(x_p, y_p, 0) = \frac{1}{2} v_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_{\varphi_0(x_p, y_p)}^{\varphi_1(x_p, y_p)} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1 - e_Q^2 \sin^2 \varphi}}$$

Таким образом, краевое условие (2) запишется следующим образом:

$$v_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{2} v_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_{\varphi_0(a,0)}^{\varphi_1(a,0)} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \varphi}} = Ba^m \quad (6)$$

$$v_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{2} v_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_{\varphi_0(0,b)}^{\varphi_1(0,b)} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \varphi}} = Ab^n$$

где, как следует из (4):

$$\delta = v_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \varphi}} \quad (7)$$

Границы внутренних интегралов в выражении (6) легко определяются. После элементарных преобразований выражения (6) примут вид

$$v_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_0^{\pi/2-\varphi_b} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \varphi}} = Ab^n$$

$$v_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \varphi}} - v_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_0^{\varphi_a} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \varphi}} = Ba^m \quad (8)$$

$$\varphi_b = \arctg \left( \frac{a_Q}{b\sqrt{1-b_Q^2/b^2}} \right), \quad \varphi_a = \arctg \left( \frac{b_Q}{a\sqrt{1-a_Q^2/a^2}} \right) \quad (9)$$

Далее сделаем предположение, что размер площадки контакта связан с внешней текущей нагрузкой  $Q$  следующей зависимостью:

$$a_Q = uQ^h, \quad b_Q = kQ^l \quad (10)$$

в частности  $a = uP^h, b = kP^l$ . Введем новое обозначение  $s = b_Q/b$ . Тогда

$$s = \left( \frac{Q}{P} \right)^l, \quad Q = Ps^{1/l}; \quad dQ = P \frac{1}{l} s^{1/l-1} ds \quad (11)$$

На основе равенства (11) выражения (10) можно переписать в виде

$$a_S = uP^h s^{h/l} = as^{h/l}, \quad b_S = kP^l s = bs \quad (12)$$

Эксцентриситет эллипса контакта под текущей нагрузкой  $Q$  находим в таком случае из выражения

$$e_S = \sqrt{1 - \frac{a_S^2}{b_S^2}} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} s^{2(h/l-1)}} = \sqrt{1 - (1-e^2)s^{2(h/l-1)}}$$

где  $e$  – эксцентриситет площадки под нагрузкой  $P$ .

С учетом новых обозначений краевые условия (8) примут вид

$$\frac{Pv_0}{bt} \int_0^1 s^{1/l-2} \left( \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi ds}{\sqrt{1-e_S^2 \sin^2 \varphi}} - \int_0^{\varphi_a} \frac{d\varphi ds}{\sqrt{1-e_S^2 \sin^2 \varphi}} \right) = Ba^m$$

$$\frac{Pv_0}{bt} \int_0^1 s^{1/l-2} \int_0^{\pi/2-\varphi_b} \frac{d\varphi ds}{\sqrt{1-e_S^2 \sin^2 \varphi}} = Ab^n \quad (13)$$

Введем обозначения интегралов в (13):

$$J_0(e) = \int_0^1 s^{n-1} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi ds}{\sqrt{1-e_s^2 \sin^2 \varphi}} \quad (14)$$

$$J_a(e) = \int_0^1 s^{n-1} \int_0^{\varphi_a} \frac{d\varphi ds}{\sqrt{1-e_s^2 \sin^2 \varphi}}, \quad J_b(e) = \int_0^1 s^{n-1} \int_0^{\pi/2-\varphi_b} \frac{d\varphi ds}{\sqrt{1-e_s^2 \sin^2 \varphi}}$$

Тогда, как следует из второго выражения (13):

$$P^{n+1} \left( \frac{V_0}{At} J_b(e) \right)^{\frac{1}{n+1}} = b$$

С другой стороны, как видно из (12)  $b = kP^l$ . Сравнивая в последних двух выражениях степени при  $P$ , получим  $l = 1/(n+1)$ . Из первого выражения (13), с учетом принятых обозначений, имеем

$$a = P^{\frac{n}{m(n+1)}} \left( \frac{V_0(J_0(e) - J_a(e))A^{\frac{1}{n+1}}(n+1)}{[V_0(n+1)J_b(e)]^{\frac{1}{n+1}}B} \right)^{\frac{1}{m}}$$

Так как из равенства (12)  $a = uP^h$ , то сравнивая в последних двух выражениях показатели при  $P$ , получим

$$h = \frac{n}{m(n+1)}$$

Таким образом, выражения (9) будут иметь вид

$$\varphi_a = \operatorname{arctg} \left( \frac{s}{\sqrt{1-e^2} \sqrt{1-s^{\frac{2n}{m}}}} \right), \quad \varphi_b = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{1-e^2} s^{\frac{n}{m}}}{\sqrt{1-s^2}} \right) \quad (15)$$

Эксцентриситет эллипса контакта под действием промежуточной нагрузки запишется в виде

$$e_s = \sqrt{1 - (1-e^2)s^{2\left(\frac{n}{m}-1\right)}} \quad (16)$$

Как видно из последнего выражения, эксцентриситет эллипса контакта является постоянной величиной только при  $n = m$ . В случае  $n \neq m$  эксцентриситет зависит от внешней нагрузки.

С учетом (15) и (16) при  $n = m$  интегралы (14) можно упростить. Интеграл  $J_0(e)$  примет вид

$$J_0(e) = \int_0^1 s^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi ds}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} = K(e) \frac{s^n}{n} \Big|_0^1 = \frac{1}{n} K(e)$$

Упростим  $J_a(e)$ , используя формулу интегрирования по частям. Для этого обозначим

$$u(s) = \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{s}{\sqrt{1-s^2} \sqrt{1-e^2}}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad dv = s^{n-1} ds$$

Тогда

$$u'(s) = \left( \operatorname{arctg} \frac{s}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-e^2}} \right)' \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \left( \operatorname{arctg} \frac{s}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-e^2}} \right)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-e^2+e^2s^2}}, \quad v = \frac{s^n}{n}$$

Откуда

$$J_a(e) = \int_0^1 s^{n-1} \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{s}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-e^2}}} \frac{d\varphi ds}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{s^n}{n} \int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \Big|_0^{\operatorname{arctg} \frac{s}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-e^2}}} -$$

$$- \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{s^n ds}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-e^2+e^2s^2}}$$

Делаем замену  $s = \cos \varphi$ . Тогда

$$J_a(e) = \frac{1}{n} K(e) - \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n \varphi d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}$$

Аналогичным образом упростим выражение для интеграла  $J_b(e)$ . Таким образом в случае  $n = m$  выражения (14) переписуются в виде

$$J_0(e) = \frac{1}{n} K(e), \quad J_a(e) = \frac{1}{n} K(e) - \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n \varphi d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$J_b(e) = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n \varphi d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (17)$$

Выражения для определения размеров площадки контакта запишутся следующим образом:

$$a = P^{\frac{n}{m(n+1)}} \left( \frac{v_0(J_0(e) - J_a(e)) A^{\frac{1}{n+1}} (n+1)}{[v_0(n+1) J_b(e)]^{\frac{1}{n+1}} B} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (18)$$

$$b = P^{\frac{1}{n+1}} \left( \frac{v_0(n+1)}{A} J_b(e) \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

Разделим первое выражение в (18) на второе. Получим

$$\frac{a}{b} = P^{\frac{n-m}{m(n+1)}} [v_0(n+1)]^{\frac{n-m}{m(n+1)}} \frac{A^{\frac{m+1}{m(n+1)}} (J_0(e) - J_a(e))^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{B^m} J_b(e)^{\frac{m+1}{m(n+1)}}$$

С другой стороны, известно, что

$$a/b = \sqrt{1 - e^2}$$

Приравняв правые части двух последних выражений, получим выражение для определения эксцентриситета:

$$\sqrt{1 - e^2} = P \frac{n-m}{m(n+1)} [v_0(n+1)]^{\frac{n-m}{m(n+1)}} \frac{A^{\frac{m+1}{m(n+1)}} (J_0(e) - J_a(e))^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{B^m} J_b(e)^{\frac{m+1}{m(n+1)}}} \quad (19)$$

Таким образом, определив из (19) эксцентриситет  $e$ , из выражения (18) определяется размер большой полуоси эллипса контакта  $b$ , а затем определяется и размер малой полуоси  $a$ .

Очевидно, выражение (19) накладывает ограничение на коэффициенты  $A$  и  $B$ . Так как левая часть равенства (19) может принимать значения от 0 до 1, то при заданных  $P$ ,  $n$ ,  $m$ ,  $v_0$  коэффициенты  $A$  и  $B$  должны быть такими, чтобы и правая часть равенства (19) лежала бы в этих пределах.

В частности, что бы определить, при каких  $A$  и  $B$  решение уравнения (19) относительно  $e$  существует при  $n = m$ , перепишем его с учетом (17):

$$(1 - e^2)^{\frac{n}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} / \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{A}{B} \quad (20)$$

Если  $0 \leq e \leq 1$ , то левая часть последнего выражения меняется от 1 до 0. Таким образом, решение (20) существует, если  $0 \leq A/B \leq 1$ .

Сравним полученные результаты с известными формулами Герца, где  $n = m = 2$ . Как следует из второго выражения (18):

$$b = \sqrt[3]{P \frac{3v_0}{2A} 2J_b(e)}$$

Из последнего выражения (17) имеем

$$J_b(e) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{2} D(e) = \frac{1}{2e^2} [K(e) - E(e)]$$

где  $K(e)$  и  $E(e)$  соответственно эллиптические интегралы первого и второго рода.

Таким образом, большая площадка контакта будет находиться из выражения:

$$b = \sqrt[3]{P \frac{3v_0}{2A} D(e)}$$

что в точности совпадает с выражением Герца.

Определим сближение  $\delta$  упругих контактирующих тел, которое возникает под внешней нормальной нагрузкой  $P$ . Для этого в выражение (7) подставим (12):

$$\delta = v_0 \frac{P(n+1)}{b} \int_0^1 S^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (1 - (1 - e^2)s^{2(n/m-1)}) \sin^2 \varphi}} ds$$

В частности, при  $n = m$ :

$$\delta = v_0 \frac{3P}{b} \int_0^1 S^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} ds = v_0 \frac{3P}{nb} K(e)$$

что также полностью совпадает с формулами Герца при  $n = 2$  и с выражением И.Я. Штаермана при  $n = 4$ .

Найдем распределение контактных напряжений. Как известно, условие равновесия при рассматриваемом контакте упругих тел можно записать в виде:

$$P = \iint_S q(x, y) dS \quad (21)$$

где  $S$  – эллиптическая площадка контакта,  $q(x, y)$  – напряжение, возникающее в точке  $(x, y)$  на площадке контакта под воздействием внешней нагрузки  $P$ .

Обозначим через  $P_{xy}$  внешнюю нагрузку, при которой точка  $(x, y)$  станет граничной для нашей площадки контакта. Очевидно, с увеличением нагрузки точка  $(x, y)$  станет внутренней точкой площадки контакта. Тогда при внешней нагрузке  $P$  напряжение, которое возникнет в точке  $(x, y)$ , получается путем интегрирования выражения (3):

$$q(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{P_{xy}}^P \frac{dQ}{a_Q b_Q \sqrt{1 - x^2/a_Q^2 - y^2/b_Q^2}}$$

С учетом (11) и (12) последнее выражение переписывается в виде

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \frac{P(n+1)}{2\pi ab} \int_{s_0}^1 \frac{s^{n-n/m-1} ds}{\sqrt{1 - x^2/a^2 s^{2n/m} - y^2/b^2 s^2}} = \\ &= \frac{P(n+1)}{2\pi ab} \int_{s_0}^1 \frac{s^{n-1} ds}{\sqrt{s^{2n/m} - y^2/b^2 s^{2n/m-2} - x^2/a^2}} \end{aligned} \quad (22)$$

где  $s_0 = P_{xy}/P$  – действительный положительный корень уравнения относительно  $s$ :

$$s^{\frac{2n}{m}} - \frac{y^2}{b^2} s^{2n/m-2} - \frac{x^2}{a^2} = 0 \quad (23)$$

Выражения (22) и (23) окончательно решают поставленную контактную задачу.

Преобразуем (22). Для этого введем обозначения

$$t = x/a, \quad p = y/b \quad (24)$$

Тогда выражение (22) примет вид

$$q_1(t, p) = q(at, bp) = \frac{P(n+1)}{2\pi ab} \int_{s_1(t,p)}^1 \frac{s^{n-1} ds}{\sqrt{s^{\frac{2n}{m}} - p^2 s^{\frac{2n}{m}-2} - t^2}} \quad (25)$$

где  $s_1(t, p)$  – действительный корень уравнения

$$s^{\frac{2n}{m}} - p^2 s^{\frac{2n}{m}-2} - t^2 = 0 \quad (26)$$

Таким образом, определение контактных напряжений по эллиптической площадке контакта мы свели к определению напряжений по круговой площадке контакта с единичным радиусом. Очевидно, применив обратную подстановку (24), получим напряжения в точках эллиптической площадки контакта.

В частности, из выражения (25) немедленно следует, что напряжение в центре площадки контакта ( $p = 0, t = 0$ ) равно

$$p_0 = q_1(0, 0) = \frac{P(n+1)}{2\pi ab} \int_0^1 s^{n-1-\frac{n}{m}} ds = \frac{P}{2\pi ab} \frac{m(n+1)}{n(m-1)} \quad (27)$$



Легко заметить, что при  $n = m = 2$  получаем выражение в точности совпадающее с выражением Герца.

При переходе от функции напряжений по эллиптической площадке контакта к функции напряжений по круговой площадке контакта с единичным радиусом условие равновесия (21) переписывается в следующем виде:

$$\iint_S q(x, y) dS = 4 \int_0^a \int_0^b \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} q(x, y) dx dy = 4ab \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-p^2}} q_1(t, p) dt dp = ab \iint_{S_1} q_1(t, p) = P \quad (28)$$

где  $S_1$  – круговая площадка контакта с радиусом 1.

Для произвольных  $n$  и  $m$  напряжения из выражений (25) и (26) без особого труда определяются численными методами. Однако, для некоторых частных случаев эти выражения можно значительно упростить.

Предположим  $n = m$ . Тогда выражение (25) примет вид

$$q_1(t, p) = \frac{P(n+1)}{2\pi ab} \frac{\int_0^1 \frac{s^{n-1} ds}{\sqrt{p^2+t^2} \sqrt{s^2-p^2-t^2}} \quad (29)$$

Это выражение можно выразить через гипергеометрическую функцию 1-го рода. Для этого сделаем замену переменной

$$z = \sqrt{s^2 - p^2 - t^2}, \quad s = \sqrt{z^2 + p^2 + t^2}, \quad ds = \frac{t}{\sqrt{z^2 + p^2 + t^2}} dt$$

Тогда

$$\begin{aligned} q_1(t, p) &= \frac{P(n+1)}{2\pi ab} \int_0^{\sqrt{1-p^2-t^2}} (t^2 + p^2 + t^2)^{\frac{n-2}{2}} dt = \\ &= \frac{P(n+1)}{2\pi ab} \sqrt{1-p^2-t^2} (p^2 + t^2)^{\frac{n-2}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1-p^2-t^2}{p^2+t^2}\right) \end{aligned}$$

где  ${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1-p^2-t^2}{p^2+t^2}\right)$  – гипергеометрическая функция 1-го рода.

В частности, при  $n = 2$ :

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, -\frac{1-p^2-t^2}{p^2+t^2}\right) = 1$$

а значит

$$q_1(t, p) = \frac{P(n+1)}{2\pi ab} \sqrt{1-p^2-t^2}$$

или

$$q(x, y) = \frac{3P}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

что в точности соответствует известной формуле Герца.

При  $n = 4$ :

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}, -\frac{1-p^2-t^2}{p^2+t^2}\right) = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1-p^2-t^2}{p^2+t^2}$$

откуда

$$q_1(t, p) = \frac{5P}{2\pi ab} \sqrt{1-p^2-t^2} (p^2+t^2) \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{1-p^2-t^2}{p^2+t^2} \right) =$$

$$= \frac{5P}{2\pi ab} \sqrt{1-p^2-t^2} \left( p^2+t^2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} p^2 - \frac{1}{3} t^2 \right) = \frac{5P}{2\pi ab} \sqrt{1-p^2-t^2} \left( 1 - \frac{2}{3} (1-p^2-t^2) \right)$$

или

$$q(x, y) = \frac{5P}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \left( 1 - \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \right)$$

что в точности совпадает с выражением И.Я. Штаермана [4].

Выражение (29) путем замены переменной  $v = \sqrt{p^2 + t^2} / s$  можно представить в несколько другом виде:

$$q_1(t, p) = \frac{P(n+1)}{2\pi ab} (p^2 + t^2)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{p^2+t^2} v^n \sqrt{1-v^2}} \quad (30)$$

Это выражение будем использовать при доказательстве выполнимости условия равновесия.

Введем полярные координаты  $p = r \cos \varphi$ ,  $t = r \sin \varphi$ . Тогда выражение (30) запишется так:

$$q_2(r) = \frac{P(n+1)}{2\pi ab} r^{n-1} \int_0^1 \frac{dv}{r v^n \sqrt{1-v^2}} \quad (31)$$

Условие равновесия (28) примет вид

$$ab \iint_S q_2(r) dS = ab \int_0^1 l(r) q_2(r) dr = P$$

где  $l(r)$  – длина окружности радиуса  $r$ , равная  $l(r) = 2\pi r$ .

Для доказательства последнего равенства, подставим в его левую часть выражение (31):

$$ab \int_0^1 l(r) q_2(r) dr = ab \int_0^1 2\pi r q_2(r) dr = P(n+1) \int_0^1 r^n \int_0^1 \frac{dv}{r v^n \sqrt{1-v^2}} dr$$

Применим метод интегрирования по частям. Для этого введем обозначения

$$u = \int_0^1 \frac{dv}{r v^n \sqrt{1-v^2}}, \quad dv = r^n dr, \quad du = -\frac{dr}{r^n \sqrt{1-r^2}}, \quad v = \frac{r^{n+1}}{n+1}$$

Тогда

$$ab \int_0^1 2\pi r q_2(r) dr = P(n+1) \int_0^1 r^n \int_0^1 \frac{dv}{r v^n \sqrt{1-v^2}} dr =$$

$$= P(n+1) \left( \frac{r^{n+1}}{n+1} \int_0^1 \frac{dv}{r v^n \sqrt{1-v^2}} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{r^{n+1}}{n+1} \left( -\frac{1}{r^n \sqrt{1-r^2}} \right) dr \right) =$$

$$= P(n+1) \int_0^1 \frac{r^{n+1}}{n+1} \left( \frac{1}{r^n \sqrt{1-r^2}} \right) dr = P \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = P$$

Таким образом, условие равновесия для функции напряжений (29), (30) или (31) выполняется для произвольных  $n = m$ .

Расчет напряжений для случая  $n = m$  приведен впервые в работе [6]. Однако в этой работе не была доказана выполнимость условия равновесия. Для сравнения полученных выражений для расчета напряжений с аналогичным, приведенным в работе [6], представим выражение (31) следующим образом:

$$q(r) = p_0(n-1)r^{n-1} \int \frac{dv}{r v^n \sqrt{1-v^2}}$$

Если ввести обозначение

$$N_n(r) = \frac{r^{n-1}(n-1)}{\sqrt{1-r^2}} \int \frac{dv}{r v^n \sqrt{1-v^2}}$$

и подставить в (31), то получится в точности выражение, приведенное в работе [6]:

$$q(x, y) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} N_n(r), \quad r = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

В таблице приведены выражения для  $N_n(r)$  при различных  $n$ .

$n$	$N_n(r)$
1	2
2	1
3	$1 + \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} \operatorname{Arth}(\sqrt{1-r^2})$
4	$1 + 2r^2$
5	$1 + \frac{3}{2}r^2 + \frac{3}{2} \frac{r^4}{\sqrt{1-r^2}} \operatorname{Arth}(\sqrt{1-r^2})$
6	$1 + \frac{4}{3}r^2 + \frac{8}{3}r^4$
7	$1 + \frac{5}{4}r^2 + \frac{15}{8}r^4 + \frac{15}{8} \frac{r^6}{\sqrt{1-r^2}} \operatorname{Arth}(\sqrt{1-r^2})$
8	$1 + \frac{6}{5}r^2 + \frac{8}{5}r^4 + \frac{16}{5}r^6$

Из выражений (25) – (26) можно еще получить несколько частных случаев при которых эти выражения значительно упрощаются. Рассмотрим в качестве примера случаи:  $m = 2, n = 4$ ;  $m = 3, n = 6$  и  $m = 4, n = 8$ .

Во всех этих случаях нижний предел интегрирования в выражении (25) будет являться корнем уравнения  $s^4 - p^2s^2 - t^2 = 0$ , который равен

$$s_1 = \sqrt{\frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{p^4 + 4t^2}}$$

Пусть  $m = 2, n = 4$ . В этом случае выражение (25) примет вид

$$q_1(t, p) = \frac{5P}{2\pi ab} \int_{s_1(t, p)}^1 \frac{s^3 ds}{\sqrt{s^4 - p^2 s^2 - t^2}}$$

Непосредственно интегрируя последнее выражение, получим

$$\begin{aligned} q_1(t, p) &= \frac{5P}{2\pi ab} \frac{\int_1^1 \frac{s^3 ds}{\sqrt{\frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^4 + 4t^2}} \sqrt{s^4 - p^2 s^2 - t^2}}} = \\ &= \frac{5P}{2\pi ab} \frac{1}{4} \left( 2\sqrt{1 - p^2 - t^2} + p^2 \ln \left( \frac{2 - p^2 + 2\sqrt{1 - p^2 - t^2}}{\sqrt{p^2 + 4t^2}} \right) \right) \end{aligned} \quad (32)$$

Проверим выполнение условия равновесия. Сосчитаем

$$\begin{aligned} ab \iint_{S_1} q_1(t, p) dS_1 &= 4 \frac{5P}{2\pi} \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-p^2}} 2\sqrt{1-p^2-t^2} dt dp + \\ &+ 4 \frac{5P}{2\pi} \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-p^2}} p^2 \ln \left( \frac{2 - p^2 + 2\sqrt{1 - p^2 - t^2}}{\sqrt{p^2 + 4t^2}} \right) dt dp = \frac{5P}{\pi} \frac{\pi}{6} + \frac{5P}{2\pi} \frac{\pi}{15} = P \end{aligned}$$

Таким образом, условие равновесия выполняется.

Пусть  $m = 3$  и  $n = 6$ . Тогда выражение (25) преобразуется в виде

$$q_1(t, p) = \frac{7P}{2\pi ab} \int_{s_1(t, p)}^1 \frac{s^5 ds}{\sqrt{s^4 - p^2 s^2 - t^2}}$$

откуда

$$\begin{aligned} q_1(t, p) &= \frac{7P}{2\pi ab} \frac{1}{16} \{ (4 + 6p^2) \sqrt{1 - p^2 - t^2} - (3p^4 + 4t^2) \ln \sqrt{p^2 + 4t^2} + \\ &+ (3p^4 + 4t^2) \ln(2 - p^2 + 2\sqrt{1 - p^2 - t^2}) \} \end{aligned} \quad (33)$$

Далее проверим условие равновесия

$$\begin{aligned} ab \iint_{S_1} q_1(t, p) dS_1 &= 4 \frac{7P}{2\pi} \frac{1}{16} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-p^2}} (4 + 6p^2) \sqrt{1 - t^2 - p^2} dt dp - \\ &- 4 \frac{7P}{2\pi} \frac{1}{16} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-p^2}} (3p^4 + 4t^2) \ln \sqrt{p^2 + 4t^2} dt dp + \\ &+ 4 \frac{7P}{2\pi} \frac{1}{16} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-p^2}} (3p^4 + 4t^2) \ln(2 - p^2 + 2\sqrt{1 - p^2 - t^2}) dt dp = 4 \frac{7P}{2\pi} \frac{\pi}{14} = P \end{aligned}$$

Очевидно, что оно выполняется.

При  $n = 8$  и  $m = 4$  имеем

$$q_1(t, p) = \frac{9P}{2\pi ab} \int_{s_1(t, p)}^1 \frac{s^7 ds}{\sqrt{s^4 - p^2 s^2 - t^2}}$$

откуда

$$q_1(t, p) = \frac{9P}{2\pi ab} \frac{1}{192} \{4\sqrt{1-p^2-t^2}(8+10p^2+15p^4+16t^2) - 3(5p^6+12p^2t^2)(\ln(p^4+4t^2)-2\ln(2-p^2+2\sqrt{1-p^2-t^2}))\} \quad (34)$$

Простой проверкой можно убедиться, что полученное выражение также удовлетворяет условию равновесия.

Следует заметить, что для большинства случаев подобные выражения для функции напряжения могут быть очень громоздкими. В то же время, для произвольных показателей функции зазора  $n$  и  $m$  с помощью выражений (25) и (26) прекрасно можно определять напряжения по площадке контакта численными методами, например, с помощью пакета "Mathematica4".

Таким образом, наряду с общей формулой для подсчета контактных напряжений (25) или (26) нами получены, как частные случаи, выражения Герца, И.Я. Штаермана [4], А.В. Королева [6]. Для произвольных  $n$  и  $m$  найдены напряжения в центре площадки контакта. Получены выражения (32), (33), (34) для расчета контактных напряжений при  $n = 4, m = 2$ ;  $n = 6, m = 3$  и  $n = 8, m = 4$ .

Решение данной контактной задачи имеет очень огромное практическое значение. Например, при изготовлении подшипников, регулируя первоначальный зазор между шариками и дорожками качения, можно добиться более равномерного распределения контактных напряжений по площадке контакта и тем самым увеличить долговечность подшипников и их грузоподъемность. Наоборот, уменьшая размеры площадки контакта между шариком и желобом, можно увеличить быстроходность подшипников. Данное положение относится и ко всем другим соединениям: зубчатым, шлицевым, фрикционным, подшипникам скольжения и т.д.

Особое практическое значение имеют случаи, когда вдоль одной из главных осей показатель функции начального зазора  $m = 2$ , а вдоль другой главной оси  $n > 2$ . Например, все тела и дорожки качения в плоскости качения имеют круглую форму и малый размер площадки контакта, и следовательно, в направлении качения значение показателя функции зазора всегда близко к двум. В поперечном же направлении телам качения можно придавать любую форму профиля, обеспечивая благоприятное распределение контактных напряжений и тем самым существенно повышая работоспособность опор трения качения.

Таким образом, полученные результаты позволяют, регулируя первоначальный зазор между контактирующими телами, получать оптимальные эпюры напряжений на площадке контакта и обеспечивать повышение работоспособности широкого класса различных механизмов и машин.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.
2. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
3. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 228 с.
4. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 272 с.
5. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 492 с.
6. Королев А.В. Выбор оптимальной геометрической формы контактирующих поверхностей деталей машин и приборов. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1972. 134 с.